

高等数学(一)试题

一、选择题:1~10小题,每小题4分,共40分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 设 $b \neq 0$, 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\sin bx$ 是 x^2 的

A. 高阶无穷小量

B. 等价无穷小量

C. 同阶但不等价无穷小量

D. 低阶无穷小量

2. 设函数 $f(x)$ 可导, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{f(1+x) - f(1)} = 2$, 则 $f'(1) =$

A. 2

B. 1

C. $\frac{1}{2}$

D. 0

3. 函数 $f(x) = x^3 - 12x + 1$ 的单调减区间为

A. $(-\infty, +\infty)$

B. $(-\infty, -2)$

C. $(-2, 2)$

D. $(2, +\infty)$

4. 设 $f'(x_0) = 0$, 则 $x = x_0$

A. 为 $f(x)$ 的驻点

C. 为 $f(x)$ 的极大值点

B. 不为 $f(x)$ 的驻点

D. 为 $f(x)$ 的极小值点

5. 下列函数中为 $f(x) = e^{2x}$ 的原函数的是

A. e^x

B. $\frac{1}{2}e^{2x}$

C. e^{2x}

D. $2e^{2x}$

6. $\int x \cos x^2 dx =$

A. $-2 \sin x^2 + C$

C. $2 \sin x^2 + C$

B. $-\frac{1}{2} \sin x^2 + C$

D. $\frac{1}{2} \sin x^2 + C$

7. $\frac{d}{dx} \int_x^0 t e^{t^2} dt =$

A. $x e^{x^2}$

B. $-x e^{x^2}$

C. $x e^{-x^2}$

D. $-x e^{-x^2}$

8. 设 $z = x^y$, 则 $\frac{\partial z}{\partial x} =$

A. $y x^{y-1}$

B. $x^y \ln x$

C. x^{y-1}

D. $x^{y-1} \ln x$

9. 设 $z = x^2 + y^3$, 则 $dz|_{(1,1)} =$

A. $3dx + 2dy$

B. $2dx + 3dy$

C. $2dx + dy$

D. $dx + 3dy$

10. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{k}{n^2}$ (k 为非零常数)

A. 绝对收敛

B. 条件收敛

C. 发散

D. 收敛性与 k 的取值有关

二、填空题: 11 ~ 20 小题, 每小题 4 分, 共 40 分.

11. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{x^2} =$

12. 函数 $f(x) = \frac{x+2}{x-2}$ 的间断点为 $x =$

13. 设 $y = x^2 + e^x$, 则 $dy =$

14. 设 $y = (2+x)^{100}$, 则 $y' =$

15. $\int \frac{dx}{3-x} =$

16. $\int_{-1}^1 \frac{x}{1+x^2} dx =$

17. $\int_0^1 e^{3x} dx =$

18. 设 $z = y^2 \sin x$, 则 $\frac{\partial z}{\partial x} =$

19. 微分方程 $y' = 2x$ 的通解为 $y =$

20. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ 的收敛半径 $R =$

三、解答题: 21 ~ 28 题, 共 70 分. 解答应写出推理、演算步骤.

21. (本题满分 8 分)

计算 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)}{x^2-1}$.

22. (本题满分 8 分)

设曲线方程为 $y = e^x + x$, 求 $y'|_{x=0}$ 以及该曲线在点 $(0, 1)$ 处的法线方程.

23. (本题满分 8 分)

计算 $\int \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$.

24. (本题满分 8 分)

计算 $\int_1^e \frac{1 + \ln x}{x} dx$.

25. (本题满分 8 分)

求曲线 $y = x^3$ 与直线 $y = x$ 所围图形(如图中阴影部分所示)的面积 S .

26. (本题满分 10 分)

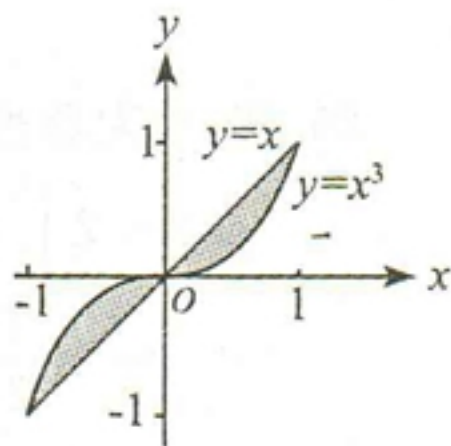
设二元函数 $z = x^2 + xy + y^2 + x - y - 5$, 求 z 的极值.

27. (本题满分 10 分)

求微分方程 $y' + \frac{1}{x}y = x$ 的通解.

28. (本题满分 10 分)

计算 $\iint_D x^2 y dx dy$, 其中 D 是由直线 $y = x, x = 1$ 及 x 轴围成的有界区域.



高等数学(一) 试题参考答案

一、选择题:每小题 4 分,共 40 分.

1. D 2. C 3. C 4. A 5. B 6. D 7. B 8. A 9. B 10. A

二、填空题:每小题 4 分,共 40 分.

11. 1

12. 2

13. $(2x + e^x)dx$

14. $100(2+x)^{99}$

15. $-\ln|3-x| + C$

16. 0

17. $\frac{1}{3}(e^3 - 1)$

18. $y^2 \cos x$

19. $x^2 + C$

20. 1

三、解答题:共 70 分.

21. 解: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos(x-1)}{2x} = \frac{1}{2}.$

22. 解: $y' = e^x + 1,$

$$y'|_{x=0} = 2.$$

曲线在点 $(0, 1)$ 处的法线方程为

$$y - 1 = -\frac{1}{2}(x - 0),$$

$$\text{即 } x + 2y - 2 = 0.$$

23. 解: 设 $\sqrt{x} = t$, 则 $x = t^2, dx = 2t dt$.

$$\int \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = \int \frac{e^{-t}}{t} \cdot 2t dt$$

$$= 2 \int e^{-t} dt$$

$$= -2e^{-t} + C$$

$$= -2e^{-\sqrt{x}} + C.$$

$$\begin{aligned}
 24. \text{ 解: } \int_1^e \frac{1+\ln x}{x} dx &= \int_1^e \frac{1}{x} dx + \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx \\
 &= \ln x \Big|_1^e + \frac{1}{2} (\ln x)^2 \Big|_1^e \\
 &= \frac{3}{2}.
 \end{aligned}$$

25. 解: 由对称性知

$$\begin{aligned}
 S &= 2 \int_0^1 (x - x^3) dx \\
 &= 2 \left(\frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{4} x^4 \right) \Big|_0^1 \\
 &= \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

$$26. \text{ 解: } \frac{\partial z}{\partial x} = 2x + y + 1, \frac{\partial z}{\partial y} = x + 2y - 1.$$

$$\text{由 } \begin{cases} 2x + y + 1 = 0, \\ x + 2y - 1 = 0 \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} x = -1, \\ y = 1. \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 1, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2.$$

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \Big|_{(-1,1)} = 2, B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \Big|_{(-1,1)} = 1, C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \Big|_{(-1,1)} = 2.$$

$$B^2 - AC = -3 < 0, A > 0,$$

因此点 $(-1, 1)$ 为 z 的极小值点, 极小值为 -6 .

$$27. \text{ 解: } y = e^{-\int \frac{1}{x} dx} \left(\int x e^{\int \frac{1}{x} dx} dx + C \right)$$

$$= \frac{1}{x} \left(\int x^2 dx + C \right)$$

$$= \frac{1}{x} \left(\frac{1}{3} x^3 + C \right).$$

$$28. \text{ 解: } \iint_D x^2 y dx dy = \int_0^1 dx \int_0^x x^2 y dy$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 x^4 dx$$

$$= \frac{1}{10} x^5 \Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{10}.$$