

高等数学(二)试题

一、选择题:1~10 小题,每小题 4 分,共 40 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{x^2+1} =$

A. 0

B. $\frac{1}{2}$

C. 1

D. 2

2. 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\sin 3x$ 是 $2x$ 的

A. 低阶无穷小量

B. 等价无穷小量

C. 同阶但不等价无穷小量

D. 高阶无穷小量

3. 函数 $f(x) = \begin{cases} x+1, & x < 0, \\ x^2, & x \geq 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处

- A. 有定义且有极限
C. 无定义但有极限

- B. 有定义但无极限
D. 无定义且无极限

4. 设函数 $f(x) = xe^{\frac{x}{2}}$, 则 $f'(x) =$

A. $(1+x)e^{\frac{x}{2}}$

B. $(\frac{1}{2} + x)e^{\frac{x}{2}}$

C. $(1 + \frac{x}{2})e^{\frac{x}{2}}$

D. $(1+2x)e^{\frac{x}{2}}$

5. 下列区间为函数 $f(x) = x^4 - 4x$ 的单调增区间的是

A. $(-\infty, +\infty)$

B. $(-\infty, 0)$

C. $(-1, 1)$

D. $(1, +\infty)$

6. 已知函数 $f(x)$ 在区间 $[-3, 3]$ 上连续, 则 $\int_{-1}^1 f(3x)dx =$

A. 0

B. $\frac{1}{3} \int_{-3}^3 f(t)dt$

C. $\frac{1}{3} \int_{-1}^1 f(t)dt$

D. $3 \int_{-3}^3 f(t)dt$

7. $\int (x^{-2} + \sin x)dx =$

A. $-2x^{-1} + \cos x + C$

B. $-2x^{-3} + \cos x + C$

C. $-\frac{x^{-3}}{3} - \cos x + C$

D. $-x^{-1} - \cos x + C$

8. 设函数 $f(x) = \int_0^x (t-1)dt$, 则 $f''(x) =$

A. -1

B. 0

C. 1

D. 2

9. 设二元函数 $z = x^y$, 则 $\frac{\partial z}{\partial x} =$

A. yx^{y-1}

B. yx^{y+1}

C. $x^y \ln x$

D. x^y

10. 设二元函数 $z = \cos(xy)$, 则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} =$

A. $y^2 \sin(xy)$

B. $y^2 \cos(xy)$

C. $-y^2 \sin(xy)$

D. $-y^2 \cos(xy)$

二、填空题: 11~20 小题, 每小题 4 分, 共 40 分.

11. $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} =$

12. $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 - \frac{2}{x})^{\frac{x}{3}} =$

13. 设函数 $y = \ln(4x - x^2)$, 则 $y'(1) =$

14. 设函数 $y = x + \sin x$, 则 $dy =$

15. 设函数 $y = x^{\frac{3}{2}} + e^{-x}$, 则 $y'' =$

16. 若 $\int f(x)dx = \cos(\ln x) + C$, 则 $f(x) =$

17. $\int_{-1}^1 x|x|dx =$

18. $\int d(x \ln x) =$

19. 由曲线 $y = x^2$, 直线 $x = 1$ 及 x 轴所围成的平面有界图形的面积 $S =$

20. 设二元函数 $z = e^{\frac{y}{x}}$, 则 $\frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{(1,1)} =$

三、解答题:21~28题,共70分.解答应写出推理、演算步骤.

21.(本题满分8分)

$$\text{计算} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - e}{\ln x}.$$

22.(本题满分8分)

设函数 $y = \cos(x^2 + 1)$, 求 y' .

23.(本题满分8分)

$$\text{计算} \int \frac{x}{4+x^2} dx.$$

24.(本题满分8分)

$$\text{计算} \int_0^4 f(x) dx, \text{ 其中 } f(x) = \begin{cases} x, & x < 1, \\ \frac{1}{1+x}, & x \geq 1. \end{cases}$$

25.(本题满分8分)

已知 $f(x)$ 是连续函数, 且 $\int_0^x f(t) e^{-t} dt = x$, 求 $\int_0^1 f(x) dx$.

26.(本题满分10分)

已知函数 $f(x) = \ln x - x$.

(1) 求 $f(x)$ 的单调区间和极值;

(2) 判断曲线 $y = f(x)$ 的凹凸性.

27.(本题满分10分)

求二元函数 $f(x, y) = \frac{x^2}{2} - xy + y^2 + 3x$ 的极值.

28.(本题满分10分)

从装有2个白球,3个黑球的袋中任取3个球,记取出白球的个数为 X .

(1) 求 X 的概率分布;

(2) 求 X 的数学期望 EX .

高等数学(二)试题参考答案

一、选择题:每小题4分,共40分.

1. A 2. C 3. B 4. C 5. D 6. B 7. D 8. C 9. A 10. D

二、填空题:每小题4分,共40分.

11. 0

12. $e^{-\frac{2}{3}}$

13. $\frac{2}{3}$

14. $(1 + \cos x) dx$

15. $\frac{3}{4} x^{-\frac{1}{2}} + e^{-x}$

16. $-\frac{\sin(\ln x)}{x}$

17. 0

18. $x \ln x + C$

19. $\frac{1}{3}$

20. $-e$

三、解答题:共70分.

$$\begin{aligned} 21. \text{解: } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - e}{\ln x} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x}{\frac{1}{x}} \\ &= e. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 22. \text{解: } y' &= [\cos(x^2 + 1)]' \\ &= -\sin(x^2 + 1) \cdot (x^2 + 1)' \\ &= -2x \sin(x^2 + 1). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 23. \text{解: } \int \frac{x}{4+x^2} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{1}{4+x^2} d(4+x^2) \\ &= \frac{1}{2} \ln(4+x^2) + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 24. \text{解: } \int_0^4 f(x) dx &= \int_0^1 x dx + \int_1^4 \frac{1}{1+x} dx \\ &= \left. \frac{x^2}{2} \right|_0^1 + \ln(1+x) \Big|_1^4 \\ &= \frac{1}{2} + \ln \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

25. 解: 等式两边对 x 求导, 得

$$f(x)e^{-x} = 1,$$

$$f(x) = e^x.$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x) dx &= \int_0^1 e^x dx \\ &= e^x \Big|_0^1 \\ &= e - 1. \end{aligned}$$

26. 解: (1) $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, $f'(x) = \frac{1}{x} - 1$.

令 $f'(x) = 0$ 得驻点 $x = 1$.

当 $0 < x < 1$ 时, $f'(x) > 0$; 当 $x > 1$ 时, $f'(x) < 0$.

$f(x)$ 的单调增区间是 $(0, 1)$, 单调减区间是 $(1, +\infty)$.

$f(x)$ 在 $x = 1$ 处取得极大值 $f(1) = -1$.

(2) 因为 $f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$, 所以曲线 $y = f(x)$ 是凸的.

27. 解: $f'_x = x - y + 3$, $f'_y = -x + 2y$.

由 $\begin{cases} x - y + 3 = 0, \\ -x + 2y = 0 \end{cases}$ 解得 $x = -6, y = -3$.

$$f''_{xx}(x, y) = 1, f''_{xy}(x, y) = -1, f''_{yy}(x, y) = 2.$$

$$A = f''_{xx}(-6, -3) = 1, B = f''_{xy}(-6, -3) = -1, C = f''_{yy}(-6, -3) = 2.$$

$$B^2 - AC = -1 < 0, A > 0,$$

故 $f(x, y)$ 在点 $(-6, -3)$ 处取得极小值, 极小值为 $f(-6, -3) = -9$.

28. 解: (1) X 可能的取值为 $0, 1, 2$.

$$P\{X=0\} = \frac{C_2^0 \cdot C_3^3}{C_5^3} = 0.1,$$

$$P\{X=1\} = \frac{C_2^1 \cdot C_3^2}{C_5^3} = 0.6,$$

$$P\{X=2\} = \frac{C_2^2 \cdot C_3^1}{C_5^3} = 0.3.$$

因此 X 的概率分布为

X	0	1	2
P	0.1	0.6	0.3

$$(2) EX = 0 \times 0.1 + 1 \times 0.6 + 2 \times 0.3 = 1.2.$$